المعادلة التفاضلية التامة وعوامل التكامل:

المعادلات التفاضلية التامة:

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية والتي من شكل:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad [1]$$

أنها تامة إذا أمكن إيجاد دالة بشكل:

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad [2]$$

ونوجد الاختبار الذي يمكن بواسطته الحكم على أن المعادلة [1] تامة أم لا وذلك كما يلي:

ومعلوم أنه يوجد أن تفاضل: [illegible]

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,\frac{dy}{\partial x} \quad (3)$$

ونعلم أن دالة F دالة مستمرة من المشتقات (x,y) فإن:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \quad (4)$$

وبمقارنة العلاقتين [2] و [3] نجد أن المشتق:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$$ مشتق الدالة بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$ (5)

وبالاستفادة من العلاقة [4] نحصل على الشرط التالي:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \quad (6)$$

والعلاقة [6] هي الشرط اللازم لتكون المعادلة [1] تامة.

الآن سنبين أن الشرط [6] هو كافٍ لذلك (كفاية الشرط):

نفرض أن شرط [6] محقق عندها نجد أن دالة [F] والتي تحقق العلاقات [5] مثلاً
لنأخذ إحدى العلاقتين من [5] ولتكن:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P$$

عندئذ وبمكاملة الطرفين بالنسبة لـ x وذلك من $x_0 \to x$ باعتبار أن y ثابت نحصل على:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \varphi(y) \qquad [7]$$

ثابت على شكل دالة

تطبيق خاصة التفاضل تحت التكامل نجد:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx + \varphi'(y)$$

وباستخدام الشرط [6] نجد:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \varphi'(y)$$

من [5] $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$

$$Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = Q(x_0,y) \Rightarrow \text{بالمكاملة}$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy$$

نعوض $\varphi(y)$ في بالمعادلة [7] فينتج لدينا F على الشكل:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy \qquad [8]$$

حيث أن كلاً من x_0, y_0 عددان مناسبان.
عندئذ نستنتج المبرهنة التالية:
مبرهنة: الشرط اللازم والكافي أن تكون المعادلة [1] تامة هو تحقق الشرط [6]

ملاحظة: يمكن الحصول على الدالة F في العلاقة 8 بمكاملة العلاقة الثانية من [5]. $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ بمكاملتها نحصل على معادلة مشابهة لـ 8

SUBJECT

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy \quad \boxed{9}$$

ملاحظة: في العلاقتين [8] و [9] يمكن اختيارها بشكل كيفي من منطقة استمرار الدالة شريطة أن تكون التكاملات معرفة
إن وجد التكامل

مثال:

$$(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$$

P Q

يجب التحقق من أن المعادلة تامة إذا تحقق الشرط،
الشرط محقق فالمعادلة تامة.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$12xy=12xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P \Rightarrow F(x,y)=\int P\,dx+\varphi(y)$$

$$F(x,y)=\int(3x^2+6xy^2)\,dx+\varphi(y)$$

~~$\frac{\partial F}{\partial y}=\int \frac{\partial(3x^2+6xy^2)}{\partial y}\,dx+\varphi'(y)$~~

~~$\frac{\partial F}{\partial y}=x^3+3x^2y^2$~~

$$F(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y) \quad *$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)$$

$$6x^2y+4y^3=6x^2y+\varphi'(y)$$

$$\varphi'(y)=4y^3 \Rightarrow \text{بالمكاملة}$$

$$\varphi(y)=\int 4y^3\,dy=y^4$$

نعوض في * فينتج لدينا:

SUBJECT:

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2 y^2 - y^4 = c$$

وهو الحل العام المطلوب.

$f(x,y) = c$
$F(x,y,c) = 0$

.جد الحل العام للمعادلة:

$$(3y\,e^{3x} - 2x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0$$

P   Q

.نثبت أن المعادلة تامة أم لا

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

.الشرط متحقق والمعادلة تامة

$$3e^{3x} = 3e^{3x}$$

.لنوجد الحل العام للمعادلة:

$$F = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dx$$

.باختيار y_0 و x_0

$$x_0 = y_0 = 0$$

$$F = \int_0^x (-2x)\,dx + \int_0^y e^{3x}\,dy$$

$$= -x^2\Big|_0^x + y\,e^{3x}\Big|_0^y = c$$

$$\boxed{F = -x^2 + y\,e^{3x} = c}$$

وهو الحل العام للمعادلة المطلوبة

Scanned by CamScanner